אלגוריתם Best (אלגוריתם kadane)

מטרה: בהינתן מערך A של מספרים שלמים (גם שליליים) למצוא רצף שסכומו גדול ביותר.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 |  | 7 |  |  | 4 |  | 5 |

**אלגוריתם**:

מאתחלים max למינוס אינסוף.  
מאתחלים sum=0

עבור i מ 1 עד n (גודל המערך)

מוסיפים ל sum את .  
 אם עדכן את max להיות sum.  
 אם אז עדכן: .

החזר את max.

**סיבוכיות**: כאשר n הוא גודל המערך.  
מעבר יחיד על המערך וביצוע של פעולות (השוואה והשמה) בכל איטרציה.

**הוכחה**: יהי הרצף הארוך ביותר בעל הסכום המקסימאלי במערך. מכאן:   
לכל כי אחרת היינו יכולים לצרף את האיברים הללו ל P ולקבל סכום גדול יותר. ולכן: לפני תחילת איטרציה i נקבל: כי בהכרח הסכום היה שלילי לפני כן. מאיטרציה i עד j, המשתנה sum לא מתאפס כי אחרת קיים כך ש: . אבל מכאן: בסתירה לכך ש P היה עם סכום מקסימאלי. לכן: באיטרציה נקבל ש: ולכן: אבל מכיוון שאין רצף בעל סכום גדול יותר אז: ולכן זה מה שיוחזר. מש"ל.

אלגוריתם Best במערך מעגלי (אלגוריתם kadane)

מטרה: בהינתן מערך A של מספרים שלמים (גם שליליים) למצוא רצף שסכומו גדול ביותר כאשר מותר לנוע במעגליות (כלומר הסכום הגדול ביותר יכול להתחיל באינדקס גבוה, להגיע לסוף המערך ולהמשיך מתחילת המערך עד נקודה באינדקס נמוך יותר).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 |  | 7 |  |  | 4 |  | 5 |

בדוגמא הסכום הכי גבוה הוא 13 - .

**אלגוריתם**:  
בהינתן מערך A

סוכמים את כל איברי המערך ושמים ב sum  
מגדירים מערך נוסף B השווה ל A- (כל איבר ב A כופלים במינוס 1)

החזר את .

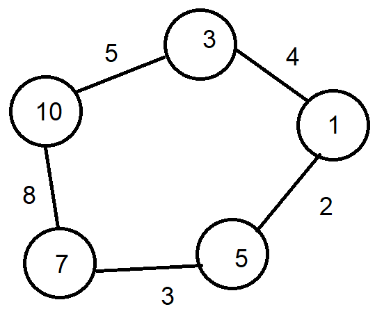
**סיבוכיות**: כאשר n הוא גודל המערך.  
מעבר על המערך לסכימה, מעבר על המערך לבניית B (הכפלה במינוס איבר איבר)  
והפעלת פעמיים האלגוריתם של best (לא מעגלי)

**הוכחה**: נוכיח את טענה 1: שבמערך מעגלי, אם ניקח את סכום כל המערך ונוריד את הרצף בעל הסכום הקטן ביותר, הרצף שיישאר, כולו בעל הסכום הגדול ביותר.  
מזה ינבע שאם במקום למצוא את הרצף בעל הסכום הגדול ביותר, נחפש את הרצף בעל הסכום הקטן ביותר ואז נוריד אותו מסכום כלל איברי המערך, נקבל בדרך אבתחוחרת את הסכום הגדול ביותר.

הוכחת טענה 1: נסמן ב X את סכום כל איברי המערך. יהי סכום הרצף הגדול ביותר. נתבונן בסכום שאר האיברים: . ברור ש: . נניח בשלילה ש N אינו בעל הסכום המינימאלי ביותר. כלומר, קיים רצף אחר בעל סכום מינימאלי יותר K. מכאן:   
מכאן, הוא רצף בעל סכום גדול יותר מ S - סתירה לכך ש S היה עם הסכום המקסימאלי.  
טענה 2: אם A הוא המערך המקורי ו: (כלומר כל איבר ב B הוא האיבר ב A כפול מינוס 1)  
אז הרצף בעל הסכום המינימאלי ב A שווה לרצף בעל הסכום המקסימאלי ב B.  
הוכחת טענה 2: יהי סכום הרצף הקטן ביותר ב A. מכאן: הוא הסכום של אותם איברים ב B (לפי הגדרת B). נניח בשלילה שיש ב B סכום T גדול יותר מ . מכאן: אז: ולכן הוא סכום רצף קטן יותר ב A - סתירה.  
נחזור להוכחת הנכונות: אם הרצף נמצא בתוך המערך ללא שימוש במעגליות אז לפי נכונות best הרגיל - נמצא את הרצף הזה. אחרת, הרצף משתמש במעגליות. לפי טענה 1, שאר האיברים מרכיבים את הסכום הקטן ביותר והרצף שלהם לא משתמש במעגליות. מכאן, לפי טענה 2, הרצף הנ"ל ב B הוא הרצף בעל הסכום הגדול ביותר ואינו משתמש במעגליות ולכן אלגוריתם Best הרגיל יימצא את הרצף הזה ולפי טענה 1, אם נוריד את המינוס שלו (כדי להפוך אותו בחזרה לרצף ב A) נקבל את הרצף הארוך ביותר.

בעיית תחנת הדלק

מטרה: רכב רוצה לצאת מנקודה על מעגל, ולסיים סיבוב נסיעה סביב המעגל מבלי שייתקע ללא דלק. על כל צלע במעגל נתון כמה דלק ייתבזבז במהלך נסיעה על הצלע הזו (נתון בתוך מערך B במקום i). על כל קודקוד שלאחר צלע i שעל המעגל יש תחנת דלק שבה ניתן למלא לכל היותר דלק.  
רוצים למצוא נקודת התחלה (אם קיימת כזו) שאם הרכב יתחיל נסיעה ממנה, הוא בהכרח יוכל לסיים את המסלול. הרכב מתחיל עם 0 דלק וממלא ישירות מהנקודה בה הוא מתחיל.



אלגוריתם: בהינתן A - כמה דלק מקבלים בכל נקודה i , ומערך B - כמה דלק מתבזבז בצלע i נגדיר את מערך השווה ליתרת הדלק לאחר צעד i.  
אם סכום כל איברי C קטן מ 0 החזר שאין פתרון.  
אחרת, נריץ את אלגוריתם best על C ונחזיר את הנקודה שממנה מתחיל הרצף ב C בעל הסכום הגדול ביותר.

סיבוכיות: כאשר - גודל מערך A וגם גודל מערך B.  
בניית המערך C, מעבר על A ו B ביחד והורדת של האיבר של B מהאיבר של A.  
קריאה לאלגוריתם best.

הוכחה: אם סכום כל איברי C קטן מ 0 אזי לכל נקודה שנבחר להתחיל ממנה, כאשר נבצע סיבוב שלם, נשאר עם יתרה שלילית, כלומר נתקע ללא דלק.  
אחרת, מנכונות best נקבל את הרצף: בעל הסכום הגדול ביותר. נניח בשלילה שאם נתחיל מ נתקע בנקודה ללא דלק, מכאן: . אם k נמצא בתוך הטווח של i עד j נקבל שהסכום: יהיה בעל סכום גדול יותר - סתירה. אם k הוא לאחר j. נקבל: . נסמן את סכום שאר איברי המערך: . לפי ההנחה: מכאן: אבל אז: שהוא הרצף: הוא סכום גדול יותר מ S - סתירה.  
לכן לא קיימת נקודה שבה נתקע ולכן ניתן יהיה לסיים את הסיבוב.

אלגוריתם Best במטריצה (אלגוריתם kadane)

מטרה: בהינתן מטריצה A של מספרים שלמים (גם שליליים) למצוא תת מטריצה עם סכום גדול ביותר.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 3 |  | 7 |  |  | 4 |  | 5 |
|  | 3 |  | 7 |  |  | 1 |  |  |
|  | 3 |  |  |  |  | 4 |  | 5 |
|  | 3 |  | 7 |  |  | 4 |  | 5 |
|  | 3 |  | 7 |  |  | 4 |  | 5 |

**אלגוריתם**:

בהינתן מטריצה A עם n שורות, m עמודות.

אם אז הגדר: .

תחילה נבנה מטריצת עזר S כאשר במיקום יהיה את הסכום של עמודה k במטריצה A (המקורית) ממיקום 0 עד מיקום j.  
מילוי S:

עבור k מ 1 עד m

עבור j מ 2 עד n

עבור k מ 1 עד m

עוברים לאלגוריתם עצמו:

מאתחלים max למינוס אינסוף.

עבור i מ 1 עד n (מאיזו שורה להתחיל לסכום)  
 עבור j מ i עד n (עד איזו שורה לסכום)  
 אתחל מערך ומלא אותו באפסים. (סכום כל עמודה)  
 עבור k מ 1 עד m  
 אם אז .  
 אחרת אז:

הפעל ושמור אותו ב

אם אז .

החזר את max.

**סיבוכיות**: כאשר n הוא המימד הקטן יותר מבין שורות/עמודות, m הוא המימד השני.  
מכיוון שתמיד אם n גדול מ m אז מבצעים שחלוף נובע ש n יהיה תמיד הקטן יותר.  
פעולת השחלוף - בניית מטריצה חדשה שהיא העתק של A - עוברים על כל איבר ב A פעם אחת ושמים אותו במקום המתאים: .  
אתחול מטריצת S: אתחול שורה ראשונה - . שאר המטריצה: כי עוברים על כל איבר ב A פעם אחת ומוסיפים אותו לסכום העמודה המתאימה. (סכום מצטבר)  
עבור כל נקודת התחלה ונקודת סיום של השורות מבצעים את מה שיש בתוך 2 הלולאות (i,j)  
מספר הזוגות i,j שנעבור עליהם הוא: כאשר i=1 הלולאה של j תרוץ n פעמים, כאשר i=2 הלולאה של j תרוץ n-1 פעמים. וכן הלאה. סה"כ נרוץ: .  
עבור כל i,j אנו בונים את מערך B ב פעולות - אתחול + גישה ל ב והשמה לתוך B.  
וקריאה לאלגוריתם best על B שמבצע: פעולות - הגודל של B.

סה"כ: .

**הוכחה**:

טענה 1: עבור כל i,j כל רצף במערך B שנוצר על i,j הנ"ל. מייצג את סכומי כל תתי המטריצות שמתחילות בשורה i ומסתיימות בשורה j.  
הוכחת טענה 1: תהי T מטריצה כנ"ל (מתחילה בשורה i ומסתיימת בשורה j) מכאן, נסמן ב x את עמודת ההתחלה וב y את עמודת הסיום. מכאן סכום איברי T הוא: .  
עבור כל i,j אנו מחפשים את הרצף בעל הסכום הגדול ביותר לפי best במערך B ומכאן לפי טענה 1, אנו מחפשים את תת המטריצה בעלת הסכום הגדול ביותר שמתחילה במיקום i ומסתיימת במיקום j ולכן מכיוון שהוכחנו ש best נכון ומכיוון שעוברים על כל i,j אפשריים נובע שנמצא את תת המטריצה בעלת הסכום הגדול ביותר ב A.